Ogólna teoria miary
Lista 6

Zad 1. Pokazać, że jeżeli zbiory $A, B \subset [0,1]$ są takie, że $m(A)+m(B) > 1$, to $A \cap B \neq \emptyset$

Zad 2. Wykazać, że dla każdego mierzalnego w sensie Lebesgue'a zbioru E i każdej liczby $a \in [0, m(E)]$ istnieje mierzalny w sensie Lebesgue'a zbiór $A \subset E$ taki, że $m(A) = a$.

Zad 3. Udowodnić, że jeżeli zbiór $A \subset \mathbb{R}^k$ nie jest miary zero, to dla każdej liczby dodatniej $c < 1$ istnieje przedział $P \subset \mathbb{R}^k$ taki, że $m(A \cap P) > c \cdot m(P)$.

Zad 4. Wykazać, że $\mathcal{C}+\mathcal{C} = [0,2]$, gdzie $\mathcal{C}$ jest zbiorem Cantora. Wyciągnąć stąd wniosek, że suma lagebraiczna dwóch zbiorów miary zero nie musi zbiorem miary zero.

Zad 5. Pokazać, że zbiór wszystkich liczb w rozwinięciu dwójkowym postaci $0, c_1, c_2, ...(2)$, gdzie $c_n = 0$ przy każdym n nieparzystym, jest miary zero.

Zad 6. Niech A będzie zbiorem wszystkich liczb przedziału $[0,1]$ mających rozwinięcie dwójkowe, w którym cyfra 0 nie występuje dwa razy. Dokładniej

$$A = \{0, c_1, c_2, ...(2) : c_n = 1 \text{ lub } c_{n+1} = 1 \text{ dla każdego } n \in \mathbb{N}\}.$$

Wykazać, że zbiór A jest miary zero.

Zad 7. Niech $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ będzie funkcja, która na każdym przedziale „usuniętym" o długości $\frac{1}{3^n}$ przyjjmuje wartość n, a na zbiorze Cantora $\mathcal{C}$ określona jest dowolnie. wykazać, że zbiór

$$\mathcal{A} = \{(x,y) : x \in [0,1],\ 0 \leq y \leq f(x)\} \subset \mathbb{R}^2$$

jest mierzalny oraz znaleźć jego miarę.

Zad 8. Niech $f : \mathcal{C} \to [0,1]$ będzie tak zwaną *funkcją Cantora*:

$$f\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2i_n}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i_n}{2^n}, \qquad i_n \in \{0,1\}.$$

Pokazać, że funkcja f jest ciągła, niemalejąca, poza przeliczalnym zbiorem punktów różnowartościowa i nigdzie nie różniczkowalna, a ponadto jednoznacznie przedłuża się do niemalejącej funkcji $F : [0,1] \to [0,1]$, która jest ciągła, i prawie wszędzie różniczkowalna.

Zad 9. Niech $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ będzie przedłużeniem funkcji z powyższego zadania takim, że $F(x) = 0$, dla $x < 0$ i $F(x) = 1$ dla $x > 1$. Uzasadnić, że wzór

$$\mu_F([a,b)) = F(b) - F(a)$$

zadaje na $\mathbb{R}$ miarę, której nośnikiem jest zbiór Cantora oraz obliczyć $\mu_F([\frac{1}{5}, \frac{1}{4}])$.

Zad 10. Opisać miarę, której dystrybuantą jest skokowa *funkcja Heaviside'a*

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}.$$